

THÉORÈME DE STONE-WEIERSTRASS

En suivant un sujet de W.A.

Dans la suite, toutes les algèbres et sous-algèbres sont unitaires.

Pour X un espace topologique, on dit d'une sous-algèbre \mathcal{A} de $\mathcal{C}^0(X, \mathbb{R})$ qu'elle sépare les points si:

$$\forall x, y \in X, \quad x \neq y \Rightarrow \exists f \in \mathcal{A}, \quad f(x) \neq f(y)$$

On souhaite montrer le théorème suivant:

THÉORÈME 1:(Stone-Weierstrass)

Soit X un espace topologique compacte (au sens de Hausdorff) et \mathcal{A} une sous-algèbre de $\mathcal{C} := \mathcal{C}^0(X, \mathbb{R})$.

Si \mathcal{A} sépare les points, elle est dense dans $(\mathcal{C}, \|\cdot\|_\infty)$

DÉFINITION (Compacité au sens de Hausdorff):

On dit d'un espace topologique (X, \mathcal{T}) qu'il est *compact* si:

- Il est *quasi-compacte* :

$$\forall (\mathcal{U}_i)_{i \in I} \in \mathcal{T}^I \text{ tq } X \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i, \quad \exists J \subseteq I \text{ tq } |J| < +\infty \text{ et } X \subseteq \bigcup_{j \in J} \mathcal{U}_j$$

- Il est *séparé* (T2):

$$\forall x \neq y \in X, \quad \exists \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{T}, \quad x \in \mathcal{U}, y \in \mathcal{V}, \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$$

On s'autorisera dans toute la suite à confondre polynôme et fonction polynomiale.

LEMME :

Soit $I := [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ et l'on note

$$\begin{array}{ccc} \alpha : I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array}$$

Alors on dispose d'une suite $(P_n)_n \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ tel que:

$$\|\alpha - P_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

PREUVE :

On commence par montrer le théorème pour $I = [-1, 1]$.

On considère:

$$\begin{aligned} f :] - 1, 1[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{1 - x} \end{aligned}$$

f est développable en série entière en 0 avec un rayon 1:

$$\forall x \in [0, 1[, \quad \sqrt{1 - x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-1)^n x^n$$

Or si l'on pose $(u_n)_n := \left(\binom{\frac{1}{2}}{n} \right)_n$, $(u_n)_n$ est décroissante et donc la série de terme général $(u_n (-1)^n)_n$ est convergente, par suite, le lemme radial d'Abel assure que la série entière converge uniformément sur $[0, 1]$.

On considère maintenant:

$$(P_n)_n := \left(\sum_{k=0}^n \binom{\frac{1}{2}}{k} (1 - X^2)^k \right) \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$$

Par ce qui précède, sur $[-1, 1]$,

$$P_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|_{\infty}} (x \mapsto |x|)$$

Finalement, quitte à dilater, le théorème est vrai sur tous les intervalles de la forme $[-a, a]$ puis sur tous les intervalles fermés.

□

On fixe dans la suite X un espace topologique au sens de la première définition et on note $\mathcal{C} := \mathcal{C}^0(X, \mathbb{R})$ munis de $\|\cdot\|_{\infty}$.

LEMME :

Soit \mathcal{A} une sous-algèbre de \mathcal{C} , alors $\overline{\mathcal{A}}$ est encore une sous algèbre de \mathcal{C} . De plus, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et tout $f \in \overline{\mathcal{A}}$,

$$P \circ f \in \overline{\mathcal{A}}$$

PREUVE :

On a $\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}}$ qui est donc non vide et contient le neutre, de plus $\overline{\mathcal{A}}$ est immédiatement un sev de \mathcal{C} .

Soient $f, g \in \overline{\mathcal{A}}$. On note $(f_n)_n, (g_n)_n \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ tels que:

$$\begin{array}{ccc} f_n & \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} & f \\ g_n & \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} & g \end{array}$$

Alors, $(h_n)_n := (f_n g_n)_n \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} & \| h_n - fg \|_{\infty} \\ & \leq \| f_n g_n - f_n g \|_{\infty} + \| f_n g - fg \|_{\infty} \\ & \leq \| f_n \|_{\infty} \| g_n - g \|_{\infty} + \| g \|_{\infty} \| f_n - f \|_{\infty} \end{aligned}$$

Or, $(f_n)_n$ converge donc $(\max(\|f_n\|_{\infty}, \|g\|_{\infty}))_n$ est borné par $K \in \mathbb{R}$ soit:

$$\| h_n - fg \|_{\infty} \leq K(\|g_n - g\|_{\infty} + \|f_n - f\|_{\infty}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

Ainsi, $fg \in \overline{\mathcal{A}}$ qui est donc une sous-algèbre de \mathcal{C} .

Par suite, pour tout $f \in \overline{\mathcal{A}}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X^n \circ f = f^n \in \overline{\mathcal{A}}$$

Puis par linéarité, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$P \circ f \in \overline{\mathcal{A}}$$

□

LEMME : ($\overline{\mathcal{A}}$ est un treillis)

Soit \mathcal{A} une sous-algèbre de \mathcal{C} . Alors pour tout $n \geq 2$ et tout $(f_1, \dots, f_n) \in \overline{\mathcal{A}}^n$,

$$\begin{aligned} (x \mapsto \max(f_1(x), \dots, f_n(x))) & \in \overline{\mathcal{A}} \\ (x \mapsto \min(f_1(x), \dots, f_n(x))) & \in \overline{\mathcal{A}} \end{aligned}$$

PREUVE :

Soit $f \in \overline{\mathcal{A}}$. On note $K = f(X)$ qui est kompacte car f continue. On dispose donc de $a \in \mathbb{R}$ tel que:

$$f(X) \subseteq [-a, a]$$

Notons alors $\alpha : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\alpha(x) = |x|$. On dispose donc de $(P_n)_n \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers α sur $[-a, a]$ donc *a fortiori* sur $f(X)$. Par suite,

$$P_n \circ f \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (x \mapsto |f(x)|)$$

Soit, comme $(P_n \circ f)_n \in \overline{\mathcal{A}}^{\mathbb{N}}$, $|f| \in \overline{\overline{\mathcal{A}}} = \overline{\mathcal{A}}$

Soit maintenant $f, g \in \overline{\mathcal{A}}$,

$$x \mapsto \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2} = x \mapsto \max(f(x), g(x)) \in \overline{\mathcal{A}}$$

$$x \mapsto \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2} = x \mapsto \min(f(x), g(x)) \in \overline{\mathcal{A}}$$

Finalement, par récurrence immédiate sur $n \geq 2$ le lemme est prouvé. □

LEMME :

Soit \mathcal{A} une sous-algèbre de \mathcal{C} qui sépare les points, $x \neq y \in X$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors on dispose de $f \in \mathcal{A}$ tel que:

$$f(x) = \alpha \quad f(y) = \beta$$

PREUVE :

On note $h \in \mathcal{A}$ tel que $h(x) \neq h(y)$. On note alors

$$P := \beta \frac{X - h(x)}{h(y) - h(x)} + \alpha \frac{X - h(y)}{h(x) - h(y)}$$

et alors $f := P \circ h \in \mathcal{A}$ et:

$$f(x) = \alpha \quad f(y) = \beta$$

□

PREUVE : (Du théorème de Stone-Weierstrass)

Fixons $f \in \mathcal{C}$ et $\varepsilon > 0$.

Fixons temporairement $x \in X$, pour tout $y \in X \setminus \{x\}$, par le lemme précédent, on dispose de $f_y \in \mathcal{A}$ tel que:

$$f_y(x) = f(x) \quad f_y(y) = f(y)$$

Notons alors, pour $y \in X \setminus \{x\}$, $\mathcal{U}_y := \{t \in X \mid f_y(t) < f(y) + \varepsilon\}$. Pour $y \in X \setminus \{x\}$, \mathcal{U}_y est ouvert et $y \in \mathcal{U}_y$, $x \in \mathcal{U}_y$. Par suite:

$$X \subseteq \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} \mathcal{U}_y$$

Par suite, comme X est compact, on dispose de $(y_1, \dots, y_n) \in (X \setminus \{x\})^n$ tel que:

$$X = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_{y_i}$$

Si l'on note alors $g_x := t \mapsto \max(f_{y_1}(t), \dots, f_{y_n}(t))$, on a, par le troisième lemme que $g_x \in \overline{\mathcal{A}}$. De plus, g_x vérifie:

$$g_x(x) = f(x) \quad \text{et} \quad \forall t \in X, \quad g_x(t) < f(t) + \varepsilon$$

On note ainsi, pour $x \in X$, $\mathcal{O}_x := \{t \in X \mid g_x(t) > f(t) - \varepsilon\}$. Les \mathcal{O}_x sont ouverts et pour tout $x \in X$, $x \in \mathcal{O}_x$. Par suite:

$$X \subseteq \bigcup_{x \in X} \mathcal{O}_x$$

Par compacité de X on dispose donc de $(x_1, \dots, x_k) \in X^k$ tel que:

$$X = \bigcup_{i=1}^k \mathcal{O}_{x_i}$$

Si l'on pose maintenant $h := t \mapsto \min(g_{x_1}(t), \dots, g_{x_k}(t)) \in \overline{\mathcal{A}}$ alors:

$$\forall t \in X \quad f(t) - \varepsilon < h(t) < f(t) + \varepsilon$$

Par suite,

$$\|f - h\|_\infty \leq \varepsilon$$

Vrai pour tout $\varepsilon > 0$ puis tout $f \in \mathcal{C}$ donc $\overline{\mathcal{A}}$ est dense puis \mathcal{A} est dense.

□